ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

МО ЭВМ, 1-й семестр, 2004–05 уч. год

доц. О.Л.Виноградов

1. Множества и операции над ними.
2. Аксиомы вещественных чисел.
3. Метод математической индукции. Бином Ньютона.
4. Метод математической индукции. Существование максимума и минимума конечного множества.
5. Целая часть числа. Плотность множества рациональных чисел.
6. Две теоремы о "бедности" счетных множеств.
7. Теорема об объединении не более чем счетных множеств (с леммами).
8. Счетность множества рациональных чисел.
9. Несчетность отрезка.
10. Единственность предела последовательности. Ограниченность сходящейся последовательности.
11. Предельный переход в неравенстве. Теорема о сжатой последовательности.
12. Бесконечно малые. Арифметические действия над сходящимися последовательностями.
13. Свойства скалярного произведения. Неравенство Коши—Буняковского.
14. Бесконечно большие и бесконечно малые. Арифметические действия над бесконечно большими.
15. Свойства открытых множеств. Открытость шара.
16. Предельные точки. Открытые и замкнутые множества. Свойства замкнутых множеств.
17. Открытость и замкнутость относительно пространства и подпространства.
18. Компактность относительно пространства и подпространства.
19. Компактность, замкнутость и ограниченность.
20. Лемма о вложенных параллелепипедах. Компактность куба.
21. Две леммы о подпоследовательностях.
22. Характеристика компактов в $\mathbb{R}^m$. Принцип выбора.
23. Сходимость и сходимость в себе. Полнота $\mathbb{R}^m$.
24. Существование точной верхней границы.
25. Предел монотонной последовательности.
26. Теорема о стягивающихся отрезках.
27. Неравенство Я.Бернулли, $\lim z^n$, число e.
28. Верхний и нижний пределы последовательности.
29. Равносильность определений предела отображения по Коши и по Гейне.
30. Простейшие свойства отображений, имеющих предел (единственность предела, локальная ограниченность, арифметические действия).
31. Предельный переход в неравенстве для функций. Теорема о сжатой функции.
32. Предел монотонной функции.

33. Критерий Больцано–Коши для функций.

34. Двойной и повторные пределы.

35. Арифметические действия над непрерывными отображениями. Стабилизация знака непрерывной функции. Непрерывность суперпозиции.

36. Характеристика непрерывности отображения с помощью прообразов.

37. Теорема Вейерштрасса о непрерывных отображениях, следствия.

38. Теорема Кантора.

39. Теорема Больцано—Коши о непрерывных функциях.

40. Непрерывный образ промежутка (с леммой). Теорема Больцано—Коши о непрерывных отображениях.

41. Разрывы и непрерывность монотонной функции.

42. Существование и непрерывность обратной функции.

43. Степень с произвольным показателем. Свойства показательной функции и логарифма.

44. Непрерывность тригонометрических и обратных тригонометрических функций.

45. Замечательные пределы.

46. Замена на эквивалентную при раскрытии неопределенностей. Асимптоты.

47. Единственность асимптотического разложения.

48. Дифференцируемость и производная.

49. Геометрический и физический смысл производной.

50. Арифметические действия и производная.

51. Производная суперпозиции.

52. Производная обратной функции и функции, заданной параметрически.

53. Производные элементарных функций.

54. Теорема Ферма.

55. Теорема Ролля.

56. Формулы Лагранжа и Коши.

57. Правило Лейбница дифференцирования произведения.

58. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

59. Формула Тейлора (глобальный вариант). Разные формы записи остаточного члена.

60. Тейлоровские разложения функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

61. Иррациональность числа e.

62. Применение формулы Тейлора к раскрытию неопределенностей.

63. Правила Лопиталя, примеры.

64. Признак монотонности функции.

65. Доказательство неравенств с помощью производной, примеры.

66. Необходимое условие экстремума. Первое правило исследования критических точек.

67. Второе правило исследования критических точек.

68. Лемма о трех хордах и следствие об односторонней дифференцируемости выпуклой функции.

69. Признаки выпуклости функции.

70. Выпуклость и касательные.
71. Неравенство Иенсена.
72. Неравенство Гельдера.
73. Неравенство Минковского.
74. Неравенства между средними.
75. Простейшие свойства первообразной и неопределенного интеграла.
76. Замена переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле.

Незнание хотя бы одной из следующих формулировок влечет оценку "неудовлетворительно": виды отображений (инъекция, сюръекция, биекция), образ, прообраз, обратное отображение; предел последовательности, функции, отображения (в разных ситуациях и на разных языках); метрическое, векторное, нормированное пространство; внутренние и предельные точки, открытые, замкнутые и компактные множества, компактность в евклидовом пространстве; сходимость в себе, полнота метрического пространства; ограниченность множества, точные границы; непрерывность, теоремы Больцано—Коши и Вейерштрасса о непрерывных функциях, равномерная непрерывность, теорема Кантора; замечательные пределы, O-символика; дифференцируемость и производная, формулы и правила дифференцирования; формулы Лагранжа и Тейлора, основные тейлоровские разложения; точки экстремума и их отыскание; первообразная, неопределенный интеграл, таблица интегралов.